

ENIDH

Apontamentos
de
Máquinas Eléctrica

José Dores Costa

2010

Nota aos leitores

Estes apontamentos destinam-se a apoiar o estudo das disciplinas de Máquinas Eléctricas e Accionamentos dos cursos de Engenharia de Sistemas Electrónicos Marítimos e de Engenharia de Máquinas Marítimas. As matérias são expostas com a preocupação de serem uma primeira abordagem ao estudo das máquinas eléctricas e dos seus accionamentos, com natural ênfase no estudo dos circuitos eléctricos e magnéticos que caracterizam as máquinas eléctricas, e os circuitos electrónicos dos sistemas que as controlam.

Estes apontamentos são uma colectânea *organizada* de diversas notas redigidas em tempos diferentes para apoio das aulas, especialmente sobre máquinas eléctricas. Estes apontamentos não são *estanques* e, sobre muitas matérias, não prescindem o estudo da bibliografia recomendada. No fim de cada capítulo e no final destas folhas, apresenta-se uma lista bibliográfica sobre a matéria aqui apresentada. A leitura de alguns desses livros é muito recomendada para o estudo aprofundado das matérias expostas.

De qualquer forma, os apontamentos foram feitos *para os alunos* com o intuito de servirem como orientação do estudo, tendo em conta a exposição e a sequência que adopto para estas matérias. Espero que deles possam tirar o melhor proveito.

José Dores Costa

Fevereiro de 2011

ÍNDICE

Lista das Figuras	5
Lista das Tabelas	8
Lista de Abreviaturas	8
CAPÍTULO 1.	9
INTRODUÇÃO	9
1.1 Objectivo	9
1.2 Nota histórica	10
CAPÍTULO 2.	12
CIRCUITOS MAGNÉTICOS	12
2.1 Campo magnético	12
2.2 Acoplamento magnético	20
2.3 Problemas	27
CAPÍTULO 3.	30
TRANSFORMADOR	30
3.1 Introdução	30
3.2 Transformador ideal	33
3.3 Transformador com perdas	35
3.4 Transformador reduzido	39
3.5 Ensaios do transformador	43
3.6 Valores por unidade (pu)	45
3.7 Problemas	52
CAPÍTULO 4.	54
SISTEMAS TRIFÁSICOS	54
4.1 Tensões e correntes	54
4.2 Potência trifásica	61
4.3 Grandezas não sinusoidais	62
4.4 Problemas	65
CAPÍTULO 5.	68
CONVERSÃO ELECTROMECHANICA DE ENERGIA	68
5.1 Campo magnético girante	68
5.2 Conversores electromecânicos	73
5.3 Problemas	76
CAPÍTULO 6.	78
MÁQUINAS ASSÍNCRONAS	78
6.1 Introdução	78
6.2 Constituição das máquinas assíncronas	79
6.3 Princípio de funcionamento	81
6.4 Circuito equivalente	83
6.5 Circuito equivalente de Thevenin	87
6.6 Ensaios em vazio e com rotor bloqueado	91
6.7 Arranque e variação da velocidade	91
6.8 Problemas	94
6.9 ANEXO: Modelo dinâmico da máquina assíncrona	95
1. Desenvolvimento do modelo	95
2. Simulação do Gerador Assíncrono com Gaiola	101
3. Resultados da Simulação	103
4. Conclusões	109

5. Bibliografia	109
CAPÍTULO 7.	110
MÁQUINAS SÍNCRONAS	110
7.1 Introdução	110
7.2 Reacção do induzido	114
7.3 Característica em vazio	115
7.4 Característica em curto-circuito	116
7.5 Circuito eléctrico equivalente	116
7.6 Coeficientes de indução	119
7.7 Funcionamento em carga	122
7.8 Características em regime estacionário	129
7.9 Curto-circuito simétrico	130
7.10 Máquinas de relutancia variável.	131
7.11 Funcionamento de alternadores em paralelo	132
7.12 Problemas	136
CAPÍTULO 8.	138
TRANSFORMADAS DE CLARKE E DE PARK	138
8.1 Introdução	138
8.2 Transformada de Clarke	139
8.3 Transformada de Park	143
8.4 Transformada dq0 num sistema trifásico	146
8.5 Bibliografia:	149

Lista das Figuras

Fig. 2.1: Regra da mão direita.....	12
Fig. 2.2: Força que actua sobre um condutor percorrido pela corrente I	13
Fig. 2.3: Diferença de potencial induzida pelo movimento.....	14
Fig. 2.4: Curva de magnetização.....	16
Fig. 2.5: Ciclo de histerese.....	16
Fig. 2.6: Circuito magnético toroidal.....	17
Fig. 2.7: Densidade de energia magnética;.....	18
Fig. 2.8: Acoplamento magnético entre condutores.....	21
Fig. 2.9: Bobinas com acoplamento magnético.....	23
Fig. 3.1: Constituição de um transformador monofásico.....	30
Fig. 3.2: Transformadores de pequena potência;.....	31
Fig. 3.3: Produção e distribuição de energia eléctrica.....	32
Fig. 3.4: Transformador de alta tensão.....	32
Fig. 3.5: Transformador ideal.....	34
Fig. 3.6: Modelo eléctrico do transformador.....	36
Fig. 3.7: Diagrama vectorial em vazio.....	37
Fig. 3.8: Modelo do transformador reduzido ao primário.....	40
Fig. 3.9: Circuito equivalente do transformador reduzido ao primário.....	41
Fig. 3.10: Circuito equivalente simplificado reduzido ao primário.....	42
Fig. 3.11: Circuito equivalente simplificado: (a) em vazio; (b) em curto-circuito.....	42
Fig. 3.12: Ensaio do transformador: (a) em vazio; (b) em curto-circuito.....	43
Fig. 3.13: Transformador monofásico do exemplo 3.1.....	46
Fig. 3.14: Circuito da Fig. 3.13 em valores pu.....	47
Fig. 3.15: Circuito equivalente do transformador reduzido ao primário no ensaio de curto-circuito.....	47
Fig. 3.16: Impedância de curto-circuito.....	49
Fig. 3.17: Circuito equivalente simplificado reduzido ao primário.....	49
Fig. 3.18: Característica externa.....	50
Fig. 3.19: Circuito equivalente simplificado.....	50
Fig. 3.20: Diagrama vectorial das tensões.....	51
Fig. 4.1: Máquina eléctrica trifásica.....	54
Fig. 4.2: Sistema de uma espira; (a) variação do fluxo devido ao movimento;.....	55
Fig. 4.3: Fem induzidas; (a) diagrama temporal; (b) diagrama vectorial.....	55
Fig. 4.4: Três circuitos monofásicos independentes.....	56
Fig. 4.5: Sistema trifásico com condutor de neutro.....	57
Fig. 4.6: Tensões trifásicas; (a) esquema; (b) diagrama vectorial.....	58
Fig. 4.7: Alternador com ligação em triângulo.....	58
Fig. 4.8: Diagramas vectoriais das correntes nas linhas e nas fases.....	60
Fig. 4.9: Sistemas de cargas em estrela e em triângulo.....	61
Fig. 5.1: Campo magnético numa espira.....	68
Fig. 5.2: Campo magnético em duas espiras perpendiculares.....	69
Fig. 5.3: Rotação do íman no campo magnético girante.....	70
Fig. 5.4: Sistema de bobinas trifásico.....	71
Fig. 5.5: Os campos magnéticos das três fases.....	72
Fig. 5.6: Reacção do induzido para $t=\pi/2\omega$	72
Fig. 5.7: Conversor electromecânico de energia.....	73

Fig. 5.8: Sistema rotativo electromecânico.....	74
Fig. 6.1: Bobina num campo magnético girante.....	78
Fig. 6.2: Constituição de máquinas de indução.....	80
Fig. 6.3: Pormenor do rotor em gaiola de esquilo.....	81
Fig. 6.4: Motor monofásico com condensador.....	81
Fig. 6.5: Circuito equivalente duma fase do estator.....	83
Fig. 6.6: Circuito equivalente/fase da máquina assíncrona.....	84
Fig. 6.7: Trânsito de potência numa máquina assíncrona.....	85
Fig. 6.8: Trânsito de potência no circuito eléctrico equivalente.....	85
Fig. 6.9: Circuito eléctrico do exemplo 6.1.....	86
Fig. 6.10: dipólo equivalente de Thevenin.....	88
Fig. 6.11: característica binário-velocidade da máquina de indução.....	89
Fig. 6.12: variação da característica de binário com a resistência rotórica.....	90
Fig. 6.13: arrancador estrela-triângulo convencional.....	92
Fig. 6.14:: Identificação dos bornes de ligação.....	93
Fig. 6.15:: Esquemas de ligação.....	93
Fig. 7.1: Esquema simplificado de um alternador trifásico.....	110
Fig. 7.2: Tipos de rotor; (a) pólos salientes; (b) cilíndrico.....	112
Fig. 7.3: Esquema de um alternador trifásico com excitação própria.....	113
Fig. 7.4: Trânsito de potências no alternador síncrono.....	113
Fig. 7.5: Característica em vazio (com velocidade constante).....	115
Fig. 7.6: Característica de curto-circuito (com velocidade constante).....	116
Fig. 7.7: Modelo eléctrico, por fase, da máquina síncrona em regime estacionário.....	117
Fig. 7.8: Cálculo das reactâncias síncronas.....	118
Fig. 7.9: Eixos magnéticos dos enrolamentos.....	119
Fig. 7.10: Modelo da máquina com rotor cilíndrico.....	120
Fig. 7.11: Fluxo numa máquina de pólos salientes; (a) segundo o eixo directo; (b) segundo o eixo de quadratura; (c) eixos directo e de quadratura.....	121
Fig. 7.12: componentes nos eixos dq da corrente na armadura.....	122
Fig. 7.13: Diagramas vectoriais para o circuito da Fig. 7.10; (a) corrente em atraso; (b) corrente em avanço.....	124
Fig. 7.14: Diagrama vectorial para um gerador com pólos salientes.....	125
Fig. 7.15: Diagrama vectorial para um gerador com rotor cilíndrico.....	125
Fig. 7.16: Funcionamento da máquina de rotor cilíndrico e o ângulo de potência.....	126
Fig. 7.17: Potência activa e ângulo de potência da máquina de pólos salientes.....	128
Fig. 7.18: Característica de regulação.....	129
Fig. 7.19: Características externas.....	130
Fig. 7.20: Corrente de curto-circuito.....	131
Fig. 7.21: máquina síncrona de relutância variável.....	132
Fig. 7.22: Gerador síncrono ligado à rede.....	133
Fig. 7.23: sincronoscópio.....	133
Fig. 7.24: Esquema de um alternador sem escovas (<i>brushless generator</i>).....	134
Fig. 7.25: circuito de regulação da corrente de campo.....	135
Fig.8.1: Campo magnético girante criado pelas correntes trifásicas no instante t	138
Fig.8.2: Campo magnético girante criado pelas correntes bifásicas com fase α	139
Fig.8.3: Sistemas de eixos (α, β)	141
Fig. 8.4: componentes (α, β)	142
Fig.8.5: Esquema simplificado da máquina síncrona e os seus sistemas de eixos.....	143
Fig.8.6: Representação de \mathbf{i}_s nos dois sistemas de eixos.....	144

Fig.8.7: Sequencia da transformação dos eixos (a, b, c) para os eixos (d, q) 145
Fig.8.8: Circuito RL equivalente a uma bobina. 147

Lista das Tabelas

Tabela 2.1: Unidades no SI.....	27
---------------------------------	----

Lista de Abreviaturas

CA	Corrente Alternada
CC	Corrente Contínua
fem	Força electromotriz
fmm	Força magnetomotriz
pu	Por Unidade
rpm	rotações por minuto
rps	rotações por segundo

CAPÍTULO 1.

INTRODUÇÃO

1.1 Objectivo

Os fenómenos eléctricos e magnéticos são interdependentes e aparecem na natureza estreitamente interligados. Esses fenómenos constituem o aspecto *visível* daquilo que se designa por campo electromagnético. A electrotecnia estuda as aplicações do campo electromagnético e umas delas são os *conversores* de energia electromagnética. Duma maneira simplificada, poderemos dizer que os conversores de energia que aqui interessam podem ser electromagnéticos, electromecânicos e electrónicos. As máquinas eléctricas podem ser encaradas como conversores de energia. No caso mais usual, as máquinas eléctricas têm partes móveis, e a conversão dá-se entre energia electromagnética e energia mecânica, e vice-versa. Por isso, podem ser consideradas como ser conversores electromagnético-mecânicos.

O campo electromagnético é uma forma de matéria. Onde ele existe observam-se fenómenos característicos cuja sistematização teórica foi apresentada por James Clerk Maxwell (1831-1879) recorrendo às célebres equações de Maxwell, publicadas em 1873.

O campo eléctrico é criado por cargas eléctricas, e o campo magnético é criado por cargas eléctricas em movimento, ou seja, por correntes eléctricas. As cargas eléctricas *movem-se* devido a diferenças de potencial eléctrico. As correntes eléctricas que daí resultam criam campos magnéticos que, se forem variáveis no tempo, originam por sua vez diferenças de potencial eléctrico nos condutores eléctricos que estão na sua proximidade. Esta interligação

As máquinas eléctricas utilizam campos magnéticos permanentes (criados por imanes), ou criados por correntes eléctricas (electroímans). Da interacção entre campos magnéticos e correntes eléctricas resultam forças. Estas forças originam trabalho mecânico. As máquinas eléctricas com partes móveis resultam daquelas interacções. Todavia, uma das máquinas que estudaremos é o transformador. Apesar deste equipamento não ter partes móveis, e a conversão de energia ser puramente electromagnética, ele partilha com as outras máquinas parte dos mesmos princípios e serve de base para a análise e modelização das outras máquinas.

Os transformadores e as máquinas eléctricas com partes móveis usam a lei geral da indução e partem do mesmo princípio: utilizam o campo magnético como meio para a transferência e conversão de energia. Por este facto, torna-se importante compreender-se o comportamento e as propriedades dos materiais magnéticos que são usados na construção destes equipamentos e a teoria do electromagnetismo estudada nas unidades curriculares de física.

Este texto inicia-se com uma breve nota histórica sobre o electromagnetismo. No capítulo 2, faz-se uma revisão dos circuitos magnéticos. No capítulo 3 estudam-se os transformadores. O capítulo 4 refere-se aos sistemas trifásicos industriais e à criação de campos magnéticos girantes. No capítulo 5 introduz-se o princípio de funcionamento das máquinas eléctricas rotativas. No capítulo 6 estudam-se as máquinas eléctricas assíncronas e no capítulo 7 as máquinas eléctricas síncronas. Finalmente, o capítulo 8 é dedicado às máquinas de corrente

contínua. O capítulo 9, dirá respeito aos circuitos electrónicos que são utilizados nos accionamentos das máquinas eléctricas rotativas.

No texto, por norma utiliza-se o sistema internacional de unidades (SI). Este sistema tem três unidades mecânicas fundamentais: o metro (m), o quilograma-massa (kg) e o segundo (s). A unidade de força é o newton (N), a unidade de energia é o joule (J) e a de potência é o watt (W). A unidade fundamental da carga eléctrica é o coulomb (C) e a da corrente eléctrica é o ampère (A). O sistema SI é ainda racionalizado: em muitas equações verifica-se a existência do factor 4π quando se consideram geometrias cilíndricas ou esféricas. Para simplificar os cálculos em muitas equações é introduzido o factor $1/4\pi$.

1.2 Nota histórica

A relação entre magnetismo e electricidade foi descoberta em 1819 por Oersted (Hans Christian Oersted, 1775-1836). Este cientista dinamarquês descobriu que a corrente eléctrica (cargas eléctricas em *movimento*) que percorre um condutor cria um campo magnético nas proximidades desse condutor. O fenómeno foi quantificado posteriormente por Ampère (André Ampère, 1775-1836), que também sugeriu que o magnetismo natural (na magnetite), fosse devido a correntes eléctricas microscópicas nesse mineral. Em 1820 Faraday (Michael Faraday, 1791-1867) quantificou a interacção entre a corrente eléctrica e o campo magnético dando origem à lei que tem o seu nome. Ampère e Henry (Joseph Henry, 1797-1878) demonstraram, independentemente um do outro, que se podia produzir uma corrente eléctrica pelo movimento relativo entre um campo magnético e um circuito eléctrico próximos. Em resultado disto, estavam criadas as bases teóricas para a produção de energia eléctrica em larga escala.

Conhecedor dos trabalhos de Faraday e de Ampère, Maxwell apresentou em 1873 uma teoria integrada sobre o campo electromagnético. O seu formalismo, consubstanciado nas conhecidas *equações de Maxwell*, constitui a teoria base do electromagnetismo. Trata-se de um trabalho que, fazendo a cúpula sobre os trabalhos anteriores de outros cientistas, permitiu o desenvolvimento de novas áreas, por exemplo, a propagação das ondas electromagnéticas (telecomunicações e óptica) e das máquinas eléctricas, e que mostrou estar conforme a teoria da relatividade apresentada por Einstein em 1905.

O electromagnetismo tem importantes implicações no modo de vida e no desenvolvimento tecnológico actuais. Refira-se, por exemplo, a produção e a distribuição de energia eléctrica, iniciadas nos finais do século XIX, que proporcionaram a energia necessária para a actividade industrial e o bem-estar das populações. Nesta área, destacam-se os trabalhos de Thomas Edison (1847-1931) e de Nikola Tesla (1856-1943). Finalmente, refira-se também a descoberta do transistor em 1948 por Jonh Bardeen, Walter Brattain e William Schokley, pela qual receberam o prémio Nobel em 1956.

Desde os salões do iluminismo até à descoberta do transistor, foi dado um grande passo para a humanidade. Estas descobertas no campo do electromagnetismo estão na base da revolução criada pelas máquinas eléctricas e pela produção, conversão e distribuição da energia eléctrica que estão na base da sociedade industrial em que vivemos.

Mesmo sem notarmos, as máquinas eléctricas fazem parte do mundo industrializado em que vivemos. Elas são utilizadas nos electrodomésticos, nos transportes públicos, nos elevadores

e escadas rolantes, em sistemas de bombagem, na produção e distribuição de energia eléctrica, tanto por meios convencionais que usam combustíveis fósseis como nos sistemas que usam as energias renováveis. E são também utilizadas nos automóveis, meios de transporte e na propulsão de navios.

CAPÍTULO 2.

CIRCUITOS MAGNÉTICOS

2.1 Campo magnético

O campo magnético é uma forma de matéria e manifesta-se, entre outros fenómenos, pelas forças mecânicas que actuam sobre materiais ferrosos e cargas eléctricas em movimento. O campo magnético é criado por correntes eléctricas e é quantificado fisicamente por duas grandezas vectoriais:

- campo de *indução* magnética, \vec{B} ;
- campo de *excitação* magnética, \vec{H} .

O campo de indução magnética, ou simplesmente campo \vec{B} , tem um carácter força e está associado à força que actua uma carga eléctrica, q , que se move com velocidade \vec{v} no interior desse campo:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.1)$$

A força (2.1) é designada por força de Lorentz; \times representa o produto externo dos vectores: a força é perpendicular ao plano definido pelas direcções de \vec{v} e de \vec{B} e o seu sentido é o da progressão de um saca-rolhas quando roda do primeiro (\vec{v}) para o segundo vector (\vec{B}). Esta é a designada *regra do saca-rolhas* ou *regra da mão direita*:

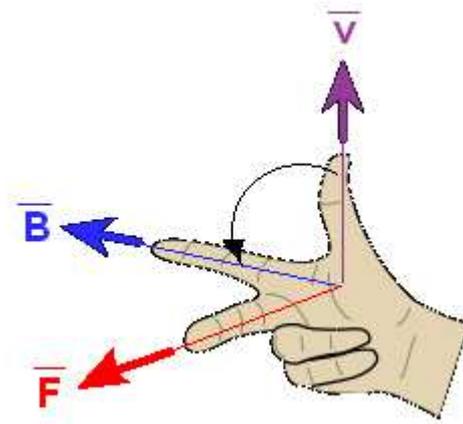


Fig. 2.1: Regra da mão direita

Sendo α o menor ângulo formado pelas direcções de \vec{v} e de \vec{B} , a intensidade da força de Lorentz (2.1) é

$$F = q v B \text{sen } \alpha \quad (2.2)$$

A força de Lorentz não é indicada para descrever a acção dum campo magnético sobre cargas eléctricas num meio condutor metálico. Porque cargas eléctricas em movimento dão origem a correntes eléctricas, é preferível considerar nesse caso o efeito do campo magnético sobre um condutor eléctrico percorrido por uma corrente de intensidade I . Considerando que a corrente eléctrica é igual à derivada da carga em ordem ao tempo,

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (2.3)$$

e introduzindo (2.3) em (2.1), conclui-se que a força elementar que actua um condutor elementar de comprimento dl percorrido por uma corrente de intensidade I é dada por

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (2.4)$$

Para um condutor rectilíneo de comprimento L , o integral de (2.4) conduz a

$$\vec{F} = I(\vec{L} \times \vec{B}) \quad (2.5)$$

Sendo α o menor ângulo formado pelas direcções de \vec{L} e de \vec{B} , a intensidade da força (2.5) é

$$F = I B L \text{sen}\alpha \quad (2.6)$$

As equações (2.4) e (2.5) descrevem a força que actua um condutor percorrido por uma corrente quando submetido a um campo magnético exterior; esta força, que é frequentemente designada por força de Laplace, é perpendicular ao condutor e depende das intensidades do campo e da corrente, Fig. 2.2.

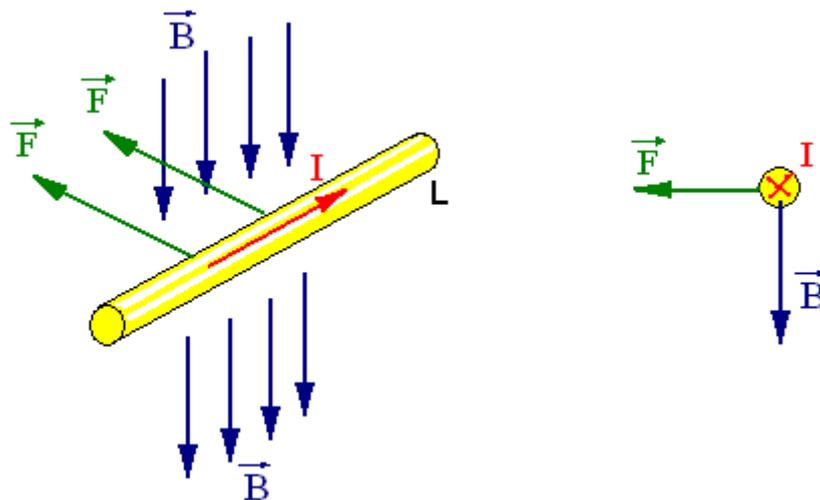


Fig. 2.2: Força que actua sobre um condutor percorrido pela corrente I .

As equações (2.1) e (2.5) relacionam a acção mecânica produzida pelo campo de indução magnética sobre um condutor percorrido por uma corrente eléctrica; traduzem afinal uma conversão entre as energias electromagnética e mecânica. Do estudo da Física sabe-se que o

fenómeno é reversível: se, por acção duma força, um condutor se mover no seio dum campo magnético, o movimento origina uma força electromotriz ε (e uma diferença de potencial u) aos terminais desse condutor; e se o condutor fizer parte dum circuito eléctrico fechado, a diferença de potencial provocará a existência duma corrente eléctrica nesse circuito, Fig. 2.3.

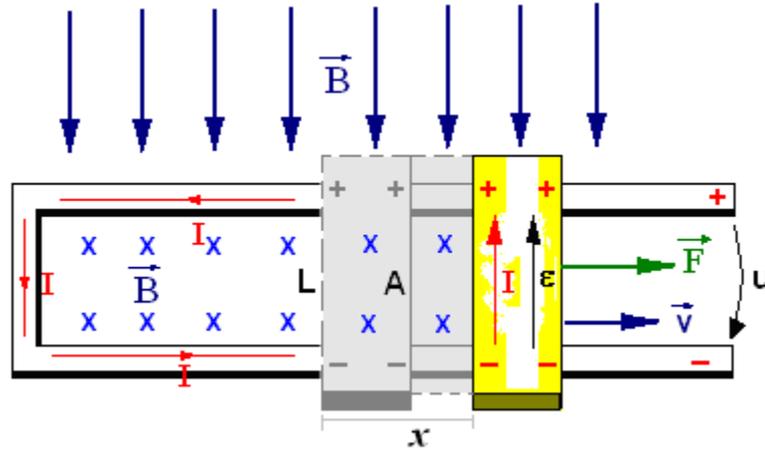


Fig. 2.3: Diferença de potencial induzida pelo movimento.

Representando por ε a força electromotriz (fem) induzida pelo movimento (com velocidade \vec{v}), e por Φ o fluxo do campo magnético, é

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -u \quad (2.7)$$

A equação (2.7) é designada por lei geral da indução (lei de Faraday). Sendo \vec{B} uniforme, a variação de fluxo é proporcional à área varrida, A :

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -B \frac{dA}{dt} \quad (2.8)$$

Considerando a velocidade constante, $dA = L dx = L v dt$; substituindo em (2.8), obtém-se

$$\varepsilon = -B L v \quad (2.9)$$

As figuras 2.2 e 2.3 e as equações (2.6) e (2.9) relacionam acções electromagnéticas e mecânicas que se verificam em condutores eléctricos no seio de campos magnéticos.

O campo de excitação magnética, ou simplesmente campo \vec{H} , é um campo derivado que traduz a modificação do campo \vec{B} provocada pelo estado magnético do meio material. A relação entre os dois campos é dada por

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (2.10)$$

onde μ_0 é a permeabilidade magnética do vazio e \vec{M} é o vector de magnetização que descreve o estado magnético do material. No SI, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$, o campo \vec{H} é medido em ampere/metro (Am^{-1}) e o campo \vec{B} é medido em tesla (T).

Fluxo de uma grandeza vectorial

O fluxo elementar do campo magnético, $d\phi$, é proporcional ao número de linhas de força do campo que atravessam a projecção da superfície dS sobre um plano perpendicular à direcção de $\vec{\mathbf{B}}$.

$$\phi = \int_S d\phi = \int_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \quad (2.11a)$$

A noção de fluxo é aplicável a qualquer grandeza vectorial, não importando a sua natureza física, e está associado à noção de *caudal*. No sentido do *escoamento*, isto é, na direcção da normal $d\vec{\mathbf{S}}$, o fluxo é positivo, e no sentido inverso é negativo.

O fluxo do campo magnético através duma superfície S fechada é nulo:

$$\phi = \oint_S d\phi = \oint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = 0 \quad (2.11b)$$

Quando sujeitos a um campo magnético exterior $\vec{\mathbf{B}}$ suficientemente intenso, existem materiais cujos momentos magnéticos dos electrões tendem a orientar-se segundo direcções bem definidas em relação ao campo magnético exterior; neste caso a magnetização, $\vec{\mathbf{M}}$, não é nula, e se for proporcional a B , a relação entre B e H pode ser escrita na forma

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}} \quad (2.12)$$

onde μ é a permeabilidade magnética do material: $\mu = \mu_r \mu_0$, sendo μ_r uma constante adimensional designada por *permeabilidade magnética relativa* desse material.

Em muitos materiais, a relação entre $\vec{\mathbf{B}}$ e $\vec{\mathbf{M}}$ não é simples, depende da intensidade de $\vec{\mathbf{B}}$, e (2.12) não traduz uma relação linear. Por exemplo, na Fig. 2.4 representa-se a relação entre B e H para um material ferromagnético.

Na curva de magnetização da Fig. 2.4 verifica-se que para valores crescentes de H , no intervalo $[0, H_1]$, a relação entre B e H é aproximadamente linear e que no intervalo $[H_1, H_2]$ não o é. Verifica-se também que os valores de B de H não coincidem nas curvas crescentes e decrescentes de H . Este fenómeno é designado por *histerese*. Na curva decrescente, quando H se anula ($H=0$) o material mantém um campo magnético residual, B_r e para se anular a magnetização do material é necessário inverter o sinal de H até ao valor H_c designado por *campo coercivo*.

A histerese é comum a todos os materiais ferromagnéticos e tem origem na conversão irreversível entre a energia magnética e energia térmica que se observa pelo aquecimento do material quando é magnetizado. Ao variar continuamente a excitação entre $-H_2$ a $+H_2$, o as trocas de energia estabilizam e obtém-se a curva da Fig. 2.5 a que se dá o nome de *ciclo de histerese*.

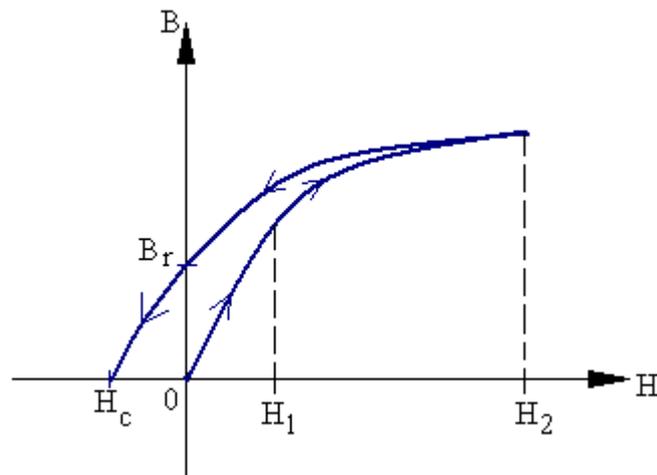


Fig. 2.4: Curva de magnetização.

A área definida pelo ciclo de histerese, Fig. 2.5, é proporcional à energia convertida irreversivelmente em calor durante o processo de magnetização do material, por variação continuada de H , por exemplo, desde $-H_2$ a $+H_2$, com retorno a $-H_2$. A energia perdida por aquecimento designa-se por *perdas por histerese* e será referida mais adiante.

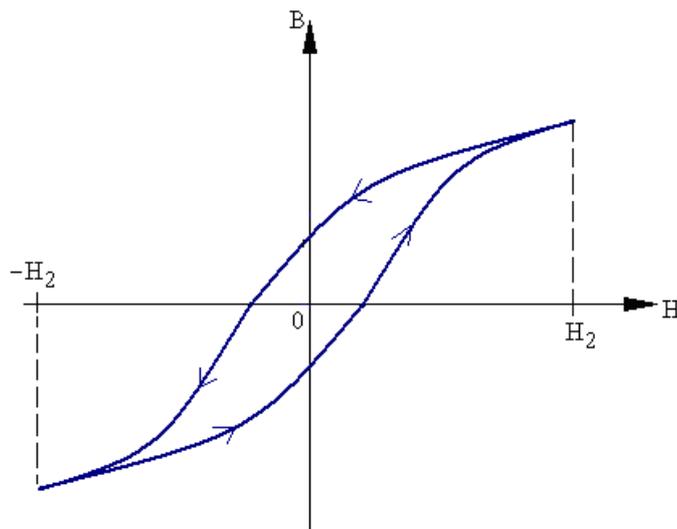


Fig. 2.5: Ciclo de histerese.

Considere-se o circuito magnético da Fig. 2.6 constituído por um toro de material ferromagnético com secção circular S , em torno do qual se enrolam n espiras de fio de cobre isolado. A bobina constituída deste modo é percorrida pela corrente I dando origem ao campo magnético \vec{B} no toro, cuja linha de força média tem raio r .

Com $i \neq 0$, existirá no toro o fluxo ϕ e o fluxo total associado à bobina de n espiras é

$$\psi = n\phi \quad (2.13)$$

Se a resistência das n espiras do fio de cobre for R , a equação que rege o circuito da Fig. (2.6) é

$$E = Ri + \frac{d\psi}{dt} \quad (2.14)$$

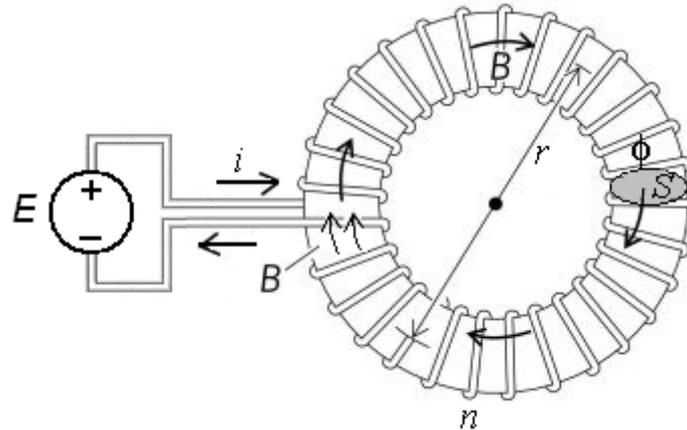


Fig. 2.6: Circuito magnético toroidal.

Como condições iniciais de (2.14), considera-se que no instante inicial quando o circuito é ligado, $t=0$, se tem $i(0)=0$ e $\psi(0)=0$. O fluxo Ψ crescerá com o aumento da corrente, sendo o crescimento proporcional à corrente quando o meio é linear,

Multiplicando ambos os membros de (2.14) por idt , resulta

$$E i dt = Ri^2 dt + i d\psi \quad (2.15)$$

O primeiro membro de (2.15) representa a energia cedida pela fonte de fem E durante o intervalo de tempo dt ; $Ri^2 dt$ representa a energia dissipada na bobina por efeito de Joule no mesmo tempo; $i d\psi$ representa a energia utilizada para criar o campo magnético \mathbf{B} . Com $dW_m = i d\psi$, a energia total do campo magnético no toro quando Ψ varia de 0 a Ψ_{\max} é

$$W_m = \int_0^{\Psi_{\max}} i d\psi \quad (2.16)$$

Considerando que o campo no toro é constante, aplicando (2.22a) ao circuito da Fig. 2.6, obtém-se

$$\phi = \int_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = B S \quad (2.17)$$

Se não existir saturação, (2.13) traduz uma relação linear, μ é constante e $B = \mu H$; o fluxo total associado à bobina é

$$\psi = n\phi = nBS \quad (2.18)$$

Recorde-se a lei de Ampère, ou lei da corrente total:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = nI \quad (2.19)$$

Para o toro da Fig. 2.6, calculando a circulação do campo \mathbf{H} ao longo da linha de força média de raio r , de (2.19) resulta:

$$Hl = nI \quad (2.20)$$

com $l=2\pi r$.

Substituindo (2.18) e (2.20) em (2.16), obtém-se

$$W_m = \int_0^{B_{\max}} \frac{Hl}{n} S n dB = \int_0^{B_{\max}} H V dB = V \int_0^{B_{\max}} H dB \quad (2.21)$$

em que $V=IS$ é o volume do toro.

O último integral da direita de (2.21) representa a energia armazenada pelo campo magnético por unidade de volume do toro (é a densidade de energia por unidade de volume). A energia total associada ao campo magnético B_{\max} é então proporcional à área sombreada da Fig. 2.7(a).

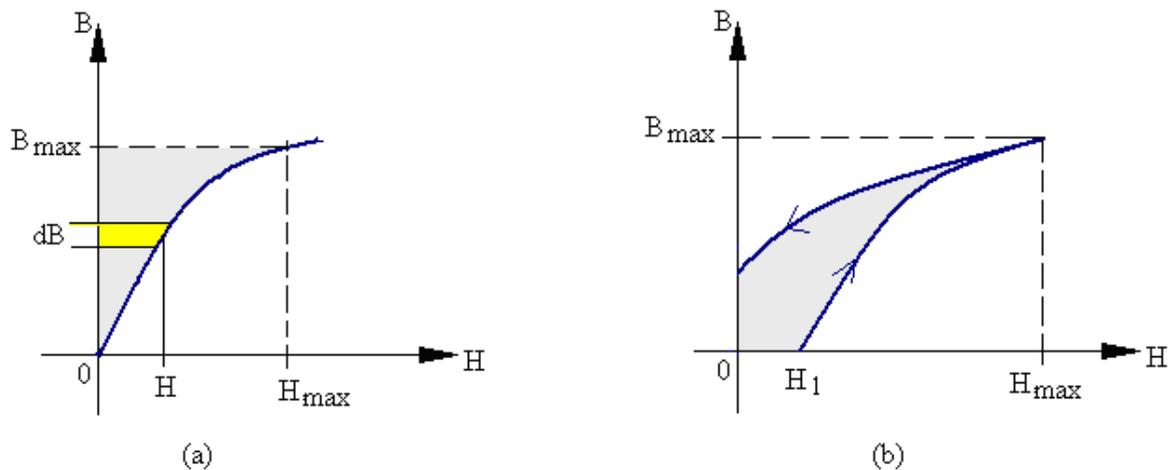


Fig. 2.7: Densidade de energia magnética;
(a) com o campo B_{\max} ; (b) perdas por histerese.

Em meios lineares, ou se não existir saturação, é $B = \mu H$, e de (2.21) resulta que a energia associada ao campo magnético B_{\max} é dada por

$$W_m = V \int_0^{B_{\max}} H dB = V \frac{H_{\max} B_{\max}}{2} \quad (2.22)$$

A área sobreada da Fig. 2.7(b) representa a energia perdida por unidade de volume ao magnetizar o material de H_1 até H_{\max} e voltar a $H=0$. Esta é justificada porque a área

limitada pelo ciclo de histerese na Fig. 2.5 é proporcional às perdas por histerese durante um ciclo de magnetização.

Os materiais ferromagnéticos *duros* têm ciclos de histerese com áreas grandes e dão origem a maiores perdas por histerese, não sendo adequados para a construção de máquinas eléctricas, em geral.

Chama-se força magnetomotriz (fmm) à circulação do vector H ao longo dum caminho fechado, l , como se apresenta em (2.19):

$$\text{fmm} = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = nI \quad (2.23)$$

Para o circuito da Fig. 2.6, desprezando a saturação, substituindo (2.17) em (2.20) obtém-se

$$\phi \frac{l}{\mu S} = nI \quad (2.24)$$

A fracção de (2.24) é a *relutância magnética* do toro (R_m). A equação (2.24) traduz a lei de Ampère escrita em função do fluxo e é frequentemente designada por lei de Hopkinson.

$$\phi R_m = nI, \text{ com } R_m = \frac{l}{\mu S} \quad (2.25)$$

A relutância magnética depende da geometria e da constituição do material e, no caso geral, depende do fluxo do campo magnético. A relutância magnética traduz a maior ou menor facilidade com que um dado material pode ser atravessado por linhas de força do campo magnético. Frequentemente, os circuitos magnéticos são caracterizados pelo inverso da relutância magnética a que se chama *permeância*.

Multiplicando ambos os membros de (2.25) pelo número de espiras n , e rearranjando, obtém-se:

$$\Psi = n\phi = \frac{n^2}{R_m} I \quad (2.26)$$

De acordo com (2.26), em meios lineares, o fluxo total associado à bobina é proporcional à intensidade da corrente eléctrica; a constante de proporcionalidade chama-se coeficiente de indução da bobina, L :

$$L = \frac{n^2}{R_m} \quad (2.27)$$

$$\Psi = LI \quad (2.28)$$

No caso geral, a relação $\Psi(i)$ não é linear, e L depende da corrente. A relação $\Psi(i)$ é ainda dada pela curva da Fig. 2.4 introduzindo as adequadas mudanças nas escalas dos eixos. Por

exemplo, para o toro da Fig. 2.6 seria $\Psi = nSB$ e $I = \frac{l}{n}H$.

Em meios lineares, L é constante e substituindo (2.28) em (2.16), resulta que a energia magnética criada por uma bobina percorrida pela corrente eléctrica com intensidade I é dada por

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 \quad (2.29)$$

Tendo em conta (2.7) a fem induzida pela variação do fluxo do campo magnético numa bobina de n espiras é

$$\varepsilon = -n \frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\psi}{dt} \quad (2.30)$$

Substituindo (2.28) em (2.30), obtém-se:

$$\varepsilon = -L \frac{di}{dt} \quad (2.31)$$

De acordo com (2.31), a fem induzida é proporcional à taxa de variação da corrente no tempo, e será nula se a corrente for constante. Substituindo (2.28) em (2.15), resulta:

$$E i dt = R i^2 dt + L i di \quad (2.32)$$

A potência posta em jogo pelo gerador da Fig. 2.6 é então

$$p = E i = R i^2 + L i \frac{di}{dt} \quad (2.33)$$

O segundo membro de (2.33) é a soma da potência de perdas na bobina por efeito de Joule com a potência associada à criação do campo magnético no toro. Quando i é constante, a potência do gerador equilibra apenas as perdas por efeito de Joule no condutor da bobina, sendo a energia magnética constante.

Para reforçar o campo magnético, as bobinas são enroladas sobre núcleos de baixa relutância magnética. Os materiais usualmente utilizados são também condutores e estão no seio de campos magnéticos variáveis. Por esse facto, são induzidas correntes parasitas (*eddy currents*), designadas por correntes de Foucault, que têm três efeitos: (1) aquecem o material por efeito de Joule; (2) dão origem a campos magnéticos que se opõem ao campo exterior enfraquecendo-o; (3) dão origem a forças electromagnéticas. As correntes de Foucault provocam perdas que se procuram reduzir com a utilização de núcleos com resistência eléctrica elevada.

A soma das perdas por histerese e às devidas às correntes de Foucault constitui aquilo que se designa por *perdas no ferro* e estão presentes em todas as máquinas eléctricas.

2.2 Acoplamento magnético

Os circuitos eléctricos têm acoplamento magnético quando partilham o mesmo campo magnético. Na Fig. 2.8 representam-se dois condutores (1 e 2) percorridos pelas correntes i_1 e i_2 , respectivamente. Considera-se que os condutores estão perto um do outro, de tal forma que as correntes criam em torno do seu condutor um campo magnético cujo fluxo, parcialmente, atravessa também o outro condutor.

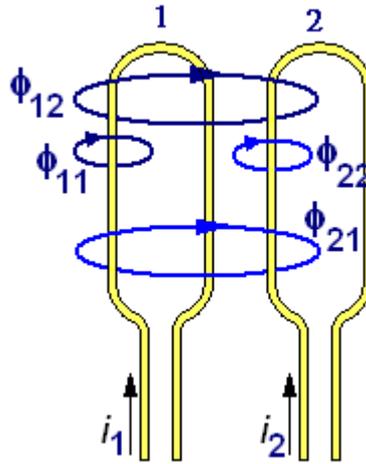


Fig. 2.8: Acoplamento magnético entre condutores.

O fluxo total ϕ_1 criado pela corrente i_1 é composto pela soma de duas parcelas: ϕ_{11} que só envolve o condutor 1 e ϕ_{12} que envolve também o condutor 2. E de modo semelhante para o fluxo total ϕ_2 criado pela corrente i_2 :

$$i_1 \rightarrow \phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} \quad (2.34)$$

$$i_2 \rightarrow \phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22}$$

Se os dois condutores tiverem n_1 e n_2 espiras, respectivamente, os fluxos totais associados a cada bobina são, respectivamente, dados por

$$\Psi_{1t} = n_1(\phi_1 \pm \phi_{21}) = \Psi_{11} \pm \Psi_{21} \quad (2.35)$$

$$\Psi_{2t} = n_2(\phi_2 \pm \phi_{12}) = \Psi_{22} \pm \Psi_{12}$$

em que

$\Psi_{11} = n_1(\phi_{11} + \phi_{12})$ é o fluxo associado à bobina 1 que é criado pela própria corrente, i_1 ;

$\Psi_{22} = n_2(\phi_{22} + \phi_{21})$ é o fluxo associado à bobina 2 que é criado pela própria corrente, i_2 ;

Em (2.35) usa-se o sinal + se os fluxos são aditivos (concordantes) e o sinal – se são subtractivos (antagónicos).

Os fluxos Ψ_{12} e Ψ_{21} , que atravessam uma bobina mas que são criados pela corrente da outra, fazem o acoplamento magnético entre as duas bobinas. Se o meio for linear, tendo em conta (2.28), cada um dos fluxos em (2.35) pode ser relacionado com a respectiva corrente através de um coeficiente de indução L :

$$\Psi_{11} \pm \Psi_{21} = L_{11}i_1 \pm L_{21}i_2 \quad (2.36a)$$

$$\Psi_{22} \pm \Psi_{12} = L_{22}i_2 \pm L_{12}i_1 \quad (2.36b)$$

Pode-se demonstrar que $L_{21}=L_{12}$ e, porque relacionam o fluxo que atravessa uma bobina com a corrente na outra bobina, designam-se por *coeficientes de indução mútua*, sendo frequentemente representados por M ($M=L_{21}=L_{12}$). Os coeficientes L_{11} e L_{22} são designados por coeficientes de *indução própria* ou de auto-indução das bobinas.

Tendo em conta (2.30), a fem total induzida em cada bobina é dada por

$$e_{1t} = -\frac{d\Psi_{1t}}{dt} = -L_{11} \frac{di_1}{dt} \mp M \frac{di_2}{dt} \quad (2.37)$$

$$e_{2t} = -\frac{d\Psi_{2t}}{dt} = -L_{22} \frac{di_2}{dt} \mp M \frac{di_1}{dt}$$

Tendo em conta (2.29), num meio linear, a energia dW_j associada ao fluxo de cada bobina devido à própria corrente é

$$W_1 = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 \quad (2.38a)$$

$$W_2 = \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 \quad (2.38b)$$

A energia associada ao fluxo de acoplamento magnético é

$$W_{12} = \int_0^{I_1} I_2 M di_1 = \int_0^{I_2} I_1 M di_2 = M I_1 I_2 \quad (2.39)$$

A energia magnética total do circuito com acoplamento magnético será a soma das duas equações (2.38) com (2.39):

$$W_{mt} = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 + M I_1 I_2 \quad (2.40)$$

O acoplamento magnético entre circuitos pode não ser desejável sendo apenas consequência da proximidade a que se encontram. Quando o acoplamento magnético é expressamente desejado para tornar possível a uma transferência de energia entre as duas bobinas, os fluxos ϕ_{11} e ϕ_{22} da Fig. 2.8 devem ser reduzidos porque não interligam magneticamente as bobinas, sendo então, do ponto de vista energético, considerados como perdas. Para melhorar o acoplamento magnético, normalmente enrolam-se as duas bobinas em torno de um núcleo de baixa relutância magnética. Esta situação é representada na Fig. 2.9, na qual o fluxo no toro, ϕ_m , realiza o acoplamento magnético das bobinas.

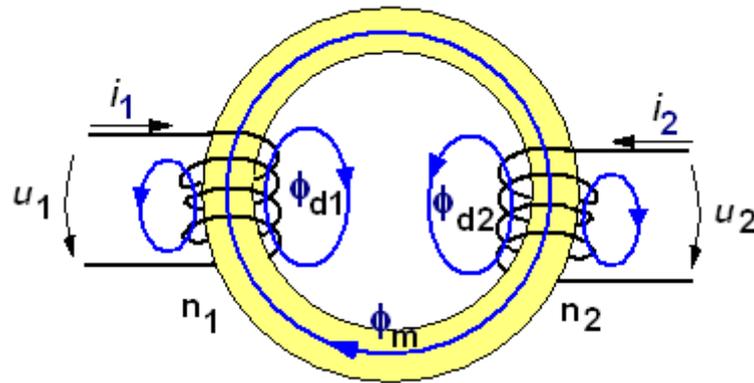


Fig. 2.9: Bobinas com acoplamento magnético.

As bobinas de n_1 e n_2 espiras são percorridas pelas correntes i_1 e i_2 , respectivamente. O fluxo total associado a cada bobina pode ser decomposto na soma de duas parcelas: ϕ_m que é o fluxo de magnetização no toro resultante daqueles criados pelas correntes das bobinas; e os fluxos de dispersão ϕ_{d1} e ϕ_{d2} . Os fluxos de dispersão ϕ_{d1} e ϕ_{d2} fecham-se pelo no ar, não transferem energia entre as duas bobinas, e correspondem aos fluxos ϕ_{11} e ϕ_{21} da Fig.2.8 que envolvem apenas os respectivos condutores.

Seja R_m a relutância magnética do toro; os fluxos associados a cada bobina são, respectivamente,

$$\Psi_{1t} = n_1(\phi_{d1} + \phi_m) = \Psi_{d1} + \Psi_{m1} \quad (2.41a)$$

$$\Psi_{2t} = n_2(\phi_{d2} + \phi_m) = \Psi_{d2} + \Psi_{m2} \quad (2.41b)$$

com

$$\phi_m = \frac{n_1 i_1 \pm n_2 i_2}{R_m} \quad (2.41c)$$

$$\Psi_{m1} = \frac{n_1^2 i_1 \pm n_1 n_2 i_2}{R_m} \quad (2.41d)$$

$$\Psi_{m2} = \frac{n_2^2 i_2 \pm n_1 n_2 i_1}{R_m} \quad (2.41e)$$

Tendo em conta (2.28) e admitindo que não existe saturação, a partir de (2.41) podem ser definidos os seguintes coeficientes de indução:

$$\text{- de magnetização da bobina 1, } L_{m1} = \frac{n_1^2}{R_m} \quad (2.42a)$$

$$\text{- de magnetização da bobina 2, } L_{m2} = \frac{n_2^2}{R_m} \quad (2.42b)$$

$$\text{- de indução mútua, } L_{12} = L_{21} = M = \pm \frac{n_1 n_2}{R_m} \quad (2.43)$$

Numa forma semelhante a (2.42), podem ser definidos os seguintes coeficientes de auto-indução de dispersão:

$$\text{- da bobina 1, } L_{d1} = \frac{n_1^2}{R_{m0}} \quad (2.44a)$$

$$\text{- da bobina da bobina 2, } L_{d2} = \frac{n_2^2}{R_{m0}} \quad (2.44b)$$

sendo R_{m0} uma relutância magnética equivalente às linhas de força no ar.

Com os coeficientes de indução definidos através das equações (2.42) a (2.44), as equações (2.41) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\Psi_{1t} = \left(\frac{n_1^2}{R_{m0}} + \frac{n_1^2}{R_m} \right) i_1 \pm \frac{n_1 n_2}{R_m} i_2 \quad (2.45a)$$

$$\Psi_{2t} = \pm \frac{n_1 n_2}{R_m} i_1 + \left(\frac{n_2^2}{R_{m0}} + \frac{n_2^2}{R_m} \right) i_2 \quad (2.45b)$$

De (2.45) resultam os coeficientes de auto-indução das bobina 1 e 2, respectivamente,

$$L_{11} = L_{d1} + L_{m1} \quad (2.46a)$$

$$L_{22} = L_{d2} + L_{m2} \quad (2.46b)$$

As equações (2.45) são equivalentes às (2.35) fazendo $\phi_{d1} = \phi_{11}$, $\phi_{d2} = \phi_{22}$ e $\phi_m = \phi_{21} \pm \phi_{12}$.

Tendo em conta (2.42), (2.43) e (2.46), as equações (2.45) podem ser escritas na seguinte forma matricial (considerando fluxos concordantes, para maior simplicidade de escrita):

$$\begin{bmatrix} \Psi_{1t} \\ \Psi_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$\text{O determinante de } \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix} \text{ é } \Delta = L_{11} \cdot L_{22} - M^2 = L_{11} \cdot L_{22} \cdot \left(1 - \frac{M^2}{L_{11} \cdot L_{22}} \right).$$

Define-se *factor de acoplamento magnético* ao valor adimensional $k = \sqrt{\frac{M^2}{L_{11} \cdot L_{22}}}$. Se a dispersão magnética for nula, de (2.45) resulta $M = \sqrt{L_{11} L_{22}}$, e então $k=1$ e $\Delta=0$; se os circuitos estiverem magneticamente desacoplados, $M=0$ e $k=0$. Desta forma, k é uma medida da *qualidade* do acoplamento magnético entre dois circuitos e, conseqüentemente, deve ser $0 \leq k < 1$.

Tendo em conta (2.37) derivando (2.47) obtém-se as fem induzidas em cada bobina:

$$\begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Generalizando, se na Fig. 2.9 as bobinas tiverem resistências R_1 e R_2 , respectivamente, as tensões aos seus terminais são dadas pelas equações seguintes:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Se $\Delta \neq 0$, (2.49) pode ser escrita na forma de um modelo de estado,

$$\begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

A equação (2.50) é o modelo matemático completo do circuito da Fig. 2.9, e a sua solução, $[i_1(t) \ i_2(t)]^t$, pode ser obtida por integração, conhecidas que sejam as tensões $u_1(t)$ e $u_2(t)$ e as condições iniciais $[i_1(0) \ i_2(0)]^t$.

Neste curso, estaremos particularmente interessados em tensões industriais do tipo alternado sinusoidal cujo valor instantâneo pode ser representado pela função $u(t) = U \cos(\omega t + \alpha)$; U é a amplitude da tensão, ω é a pulsação ($\omega = 2\pi f$) e α é a fase na origem, isto é, a fase para $t=0$.

Para grandezas alternadas sinusoidais, as soluções forçadas podem ser calculadas no domínio da frequência. Nesta mudança de domínios, os valores instantâneos são substituídos por amplitudes complexas e o operador derivada é substituído por $j\omega$: $\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega$. Por exemplo, considere-se a tensão $u(t) = U \cos(\omega t + \alpha)$. Para os domínios do tempo e da frequência são válidas as seguintes correspondências:

Domínio do tempo	Domínio da frequência
$u(t) = U \cos(\omega t + \alpha)$	$\vec{U} = U e^{j\alpha}$
$\frac{d u(t)}{d t}$	$j\omega \vec{U}$
$\frac{d u(t)}{d t} = U \omega \cos(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2})$	$j\omega \vec{U} = U \omega e^{j(\alpha + \frac{\pi}{2})}$

(2.51)

Aplicando (2.51) a (2.49), resulta:

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

E simplificando, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_{11} & j\omega M \\ j\omega M & R_2 + j\omega L_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Conhecidas as correntes sinusoidais nas bobina da Fig. 2.9, a equação (2.53) permite o cálculo das amplitudes complexas das tensões aos terminais das bobinas. Por outro lado, sendo conhecidas as amplitudes complexas das tensões, se a matriz das impedâncias for invertível, as amplitudes complexas das correntes são dadas por:

$$\begin{bmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_{11} & j\omega M \\ j\omega M & R_2 + j\omega L_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

De (2.54) resulta:

$$\vec{I}_1 = \frac{(R_2 + j\omega L_{22})\vec{U}_1 - j\omega M \vec{U}_2}{(R_1 + j\omega L_{11})(R_2 + j\omega L_{22}) + \omega^2 M^2} \quad (2.55a)$$

$$\vec{I}_2 = \frac{(R_1 + j\omega L_{11})\vec{U}_2 - j\omega M \vec{U}_1}{(R_1 + j\omega L_{11})(R_2 + j\omega L_{22}) + \omega^2 M^2} \quad (2.55b)$$

As unidades das grandezas *magnéticas* que temos estado a tratar, no sistema internacional de medidas (SI), estão resumidas na tabela 2.1.

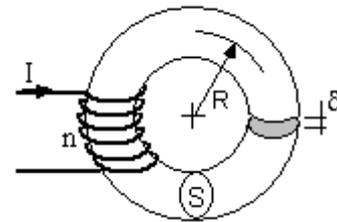
Tabela 2.1: Unidades no SI

Grandeza	Unidade	Símbolo
B	tesla	T
H	ampere/m	Am^{-1}
Ψ, Φ	weber	Wb
L	henry	H
R_m	1/henry	H^{-1}
fmm	ampere-espira	Ae

2.3 Problemas

2.1 A Fig. 2.P1 representa um circuito magnético constituído por um toro de material ferromagnético uniforme com permeabilidade magnética relativa μ_{Fe} em torno do qual se enrolaram n espiras de um fio condutor isolado; o toro tem o raio médio R , a secção recta uniforme S e um entreferro de espessura δ . Não existindo saturação, calcule:

- a relutância magnética do ferro e do ar;
- a relutância magnética total do núcleo;
- o fluxo do campo magnético no toro;
- os campos de indução e de excitação magnéticos no ferro e no ar;
- o coeficiente de auto-indução da bobina;
- a energia magnética armazenada no ferro e no ar;
- a fmm necessária para duplicar o campo magnético de indução no ar.



$$R=2 \text{ cm}; \delta=1 \text{ mm}; S=0,79 \text{ cm}^2;$$

$$I=1 \text{ A}; n=100; \mu_{\text{Fe}}=7000.$$

Fig. 2.P1

2.2 Considere o circuito da Fig. 2.P1 com o entreferro $\delta=0,1 \text{ mm}$. Calcule os campos de indução e de excitação magnéticos, e a energia magnética, no ferro e no ar.

2.3 A Fig. 2.P2 representa um circuito magnético constituído por um toro de material com permeabilidade magnética relativa μ_r , com o raio médio R e a secção recta uniforme S , em torno do qual se enrolaram duas bobinas de fios condutores isolados com n_1 e n_2 espiras, respectivamente. Considerando que não existe saturação, com a bobina n_2 em vazio, obtenha a tensão $u_2(t)$, nos seguintes casos:

- a) $i(t) = 1 \text{ A}$;
 b) $i(t) = 1 + 2t \text{ A}$;
 c) $i(t) = 2 \cdot \cos(\omega t) \text{ A}$.

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$$

$$R = 2 \text{ cm}; S = 0,79 \text{ cm}^2; n_1 = 100; n_2 = 50; \mu_r = 1000;$$

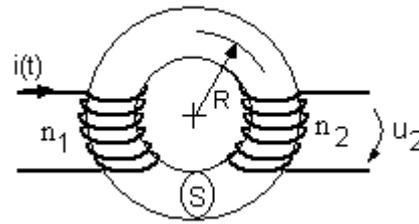


Fig. 2.P2

2.4 Para o circuito da Fig. 2.P2, obtenha os coeficientes de indução própria e mútua das duas bobinas.

2.5 Na Fig. 2.P3, R_1 representa a resistência da bobina n_1 enrolada em torno do toro da Fig. 2.P3. Obtenha:

- (a) a corrente $i(t)$ quando se liga uma tensão contínua $U = 6 \text{ V}$ à bobina n_1 , com $i(0) = 0$;
 (b) a tensão $u_2(t)$, quando se liga tensão contínua da (a).

$$R_1 = 3 \Omega.$$

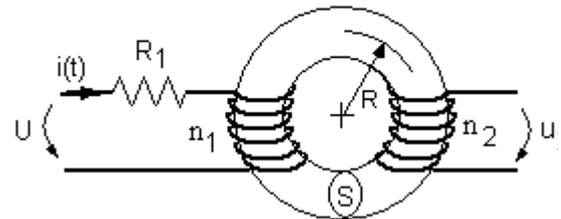
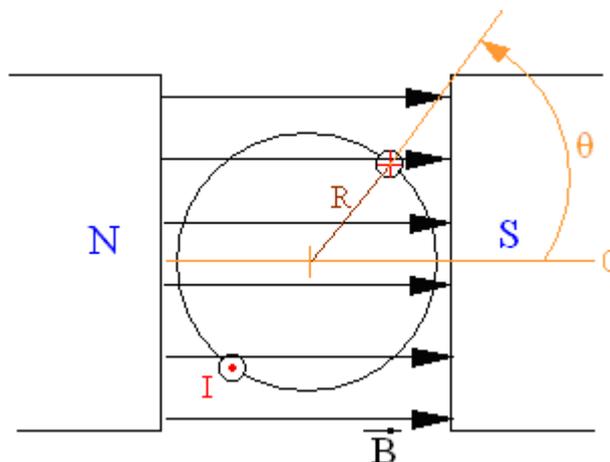


Fig. 2.P3

2.6 A Fig. 2.P4 apresenta o corte num rotor com comprimento l e raio R , que contém uma espira percorrida pela corrente contínua I , e que gira no seio dum campo magnético uniforme \mathbf{B} . Calcule:

- (a) o binário que actua o rotor em função de θ ;
 (b) as posições do rotor para as quais o binário é nulo e aquelas em que é máximo.
 (c) Calcule a fem induzida na espira em vazio ($I = 0$) quando o rotor roda com a velocidade constante $N = 60 \text{ rpm}$.
 (d) Repita a (c) considerando uma bobina de 20 espiras rodando à mesma velocidade.



$$l = 10 \text{ cm}$$

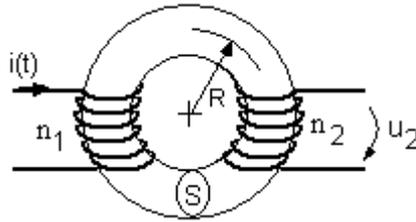
$$R = 5 \text{ cm}$$

$$I = 5 \text{ A}$$

$$B = 0,9 \text{ T}$$

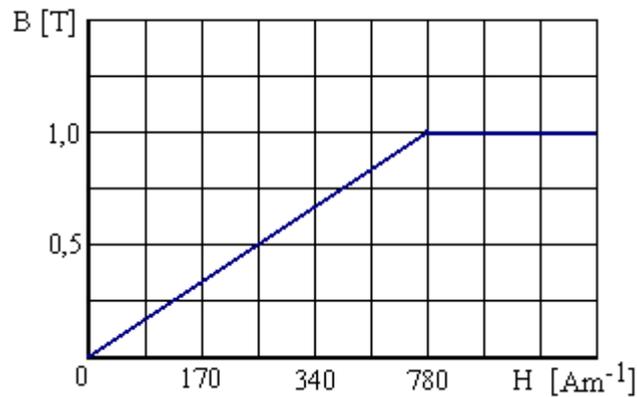
Fig. 2.P4

2.7 Considere o circuito magnético da Fig. 2.P5(a). O material do toro tem a característica de magnetização aproximada da Fig. 2.P5 (b). A bobina n_2 está em vazio.



$$R=2 \text{ cm}; S=1 \text{ cm}^2; n_1=100; n_2=100; \mu_r=1000; \mu_0= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$$

(a)



(b)

Fig. 2.P5

Obtenha o diagrama temporal da tensão $u_2(t)$ se $i(t) = 2 \cdot \cos(314t)$ A.

Bibliografia

A.E. Fitzgerald, C. Kingsley, S.D. Umans, *Electric Machinery*, McGraw-Hill, 6ª Ed.

Stephen J. Chapman, *Electric Machinery Fundamentals* McGraw-Hill, 5th Edition, 2011.